Esercizi di Controlli Automatici - Parte I

L. Magni, C. Toffanin

1 Esercizio

Il modello (parziale) di un reattore per la polimerizzazione è descritto dalle seguenti equazioni, dove, in variabili adimensionali, x_1 è la concentrazione del monomero e x_2 è la concentrazione dell'iniziatore e u è la portata volumetrica dell'iniziatore.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 10(6 - x_1(t)) - 2x_1(t)\sqrt{x_2(t)} \\ \dot{x}_2(t) = 80u(t) - 10x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

1. si determini lo stato di equilibrio che corrisponde all'ingresso costante $\bar{u} = 0.125$;
2. si determini il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio trovato;
3. si studi la stabilità dell'equilibrio
4. si calcoli la funzione di trasferimento del sistema linearizzato

2 Esercizio

Si consideri il sistema rappresentato in Figura 1, consistente in un pistone di massa $M = 10Kg$, tenuto in lievitazione elettromagnetica tramite un circuito elettrico che alimenta una elettrocalamita. Il pistone è soggetto alla forza di gravità e alla forza $F = i^2/y$, dove i è la corrente del circuito elettrico e y la distanza del pistone dalla elettrocalamita. Siano $L = 0.01H$ la induttanza totale e $R = 4\Omega$ la resistenza del circuito

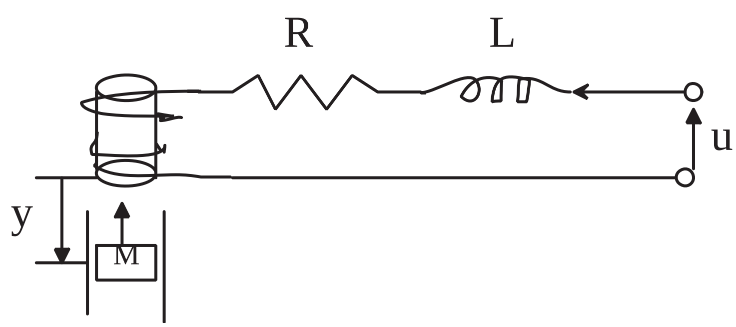


Figure 1: Rappresentazione del sistema (esercizio 2)

1. Si rappresenti il sistema in termini di equazioni di stato
2. Si ricavi l'ingresso u necessario per mantenere il pistone in uno stato di equilibrio corrispondente alla posizione $y = 0.5m$
3. Linearizzando il sistema attorno ai punti di equilibrio trovati si discuta la natura di tali punti di equilibrio

3 Esercizio

Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& x_2 \\ \dot{x}_2 &=& -x_1 + x_1^3 - x_1 x_2^2 - x_2 \end{cases}$$

a) Si determinino gli stati di equilibrio

b) Si studi la stabilità di ciascun stato di equilibrio

4 Esercizio

Il modello di un mulino per la produzione di cemento è descritto dalle seguenti equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& -x_1 + 0.8\varphi(x_2) \\ \dot{x}_2 &=& -0.8\varphi(x_2) + u \\ y &=& x_1 \end{cases}$$

in cui $\varphi(x_2) = -0.1x_2^2 + 16x_2$.

a) Determinare il punto di equilibrio per cui risulta $\bar{x}_2 = 100$.

b) Linearizzare il sistema attorno a tale punto di equilibrio trovando le equazioni del sistema in variabili di stato.

c) Studiare la stabilità del punto di equilibrio trovato.

d) Ricavare la funzione di trasferimento.

e) Supponendo che l'ingresso u sia dato da $\delta u = K\delta y$, studiare la stabilità del sistema linearizzato così ottenuto, al variare di K.

5 Esercizio

Si studi la stabilità del seguente sistema mediante l'equazione di Lyapunov e mediante il metodo degli autovalori

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & -2x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 & = & 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

6 Esercizio

Si studi la stabilità del seguente sistema mediante la funzione di Lyapunov e mediante il metodo degli autovalori

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

7 Esercizio

Si enunci il teorema di Lyapunov per la stabilità dei sistemi continui e lo si applichi al sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

per studiarne la stabilità.

Si verifichi il risultato con il metodo degli autovalori.

8 Esercizio

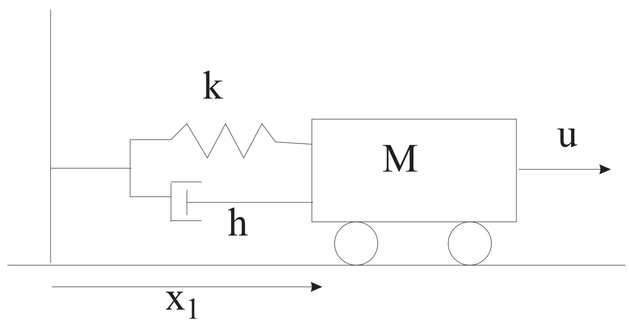
Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 6x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 \end{cases}$$

Utilizzando una funzione di Lyapunov si studi la stabilità del sistema. Si controlli il risultato ottenuto con il metodo degli autovalori.

9 Esercizio

Si consideri il sistema riportato in Figura



con $M = k = 1, u = 0$.

1. Si studi la stabilità del sistema al variare di $h > 0$ mediante una funzione di Lyapunov.
2. Si dica per quali valori di $h > 0$ il sistema è oscillante.

10 Esercizio

Applicando la **definizione** di stabilità di Lyapunov si dimostri che il sistema

$$\dot{x} = ax$$

è:

1. asintoticamente stabile se a ....
2. semplicemente stabile se a ....
3. instabile se a .....

11 Esercizio

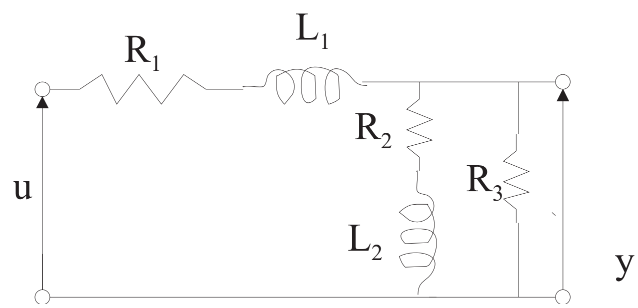
Un serbatoio d'acqua è alimentato da un canale fluviale tramite l'apertura istantanea di una saracinesca in grado di riversare 1 m^3 di acqua/ora nel serbatoio. Il serbatoio ha una sezione di 2 m^2 ed è alto 5 m, ed ha una perdita d'acqua in volume, proporzionale al livello presente nel serbatoio stesso secondo un coefficiente $K_1 = 0.2 m^2/\text{ora}$

1. Si determini se partendo con serbatoio vuoto e con la sracinesca aperta il serbatoio trabocca.

2. Si determinino il valore minimo e il valore massimo del livello dell'acqua a regime aprendo e chiudendo la saracinesca alternativamente ogni ora.

12 Esercizio

Si consideri il circuito riportato in Figura



con $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 1\Omega$, $L_1 = 0.2H$, $L_2 = 0.5H$

1. Si descriva il sistema in termini di equazioni di stato e trasformazione d'uscita

2. Si verifichi la raggiungibilità dello stato del sistema

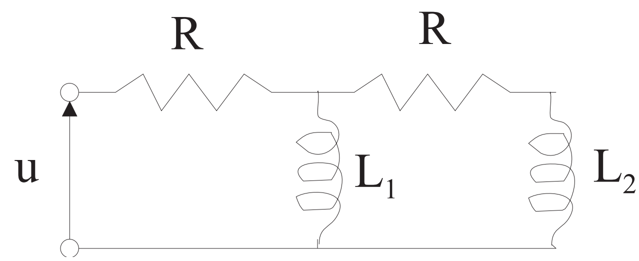
3. Eseguendo una retroazione sullo stato del sistema (i.e. $u = Kx + v$) si faccia in modo che gli autovalori del sistema siano $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -3$

4. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema retroazionato.

5. Si determini l'uscita a regime per $u(t) = 100sca(t)$

13 Esercizio

Si consideri il circuito riportato in Figura



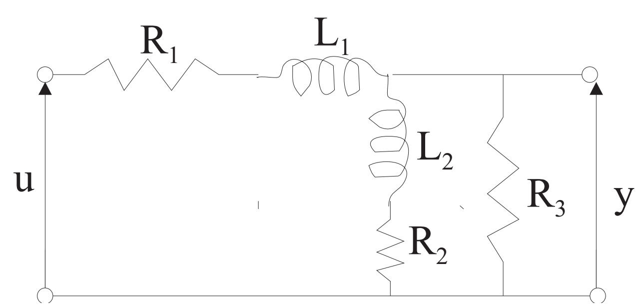
con $R = 3\Omega$, $L_1 = 1H$, $L_2 = 0.5H$.

1. Si descriva il circuito in termini di relazioni ingresso-stato
2. Si ricavi la risposta impulsiva dello stato a meno dei coefficienti.
3. Si calcoli lo stato **a regime** per un ingresso

$$u(t) = [10sen(2t) + 2sca(t)]$$

14 Esercizio

Si consideri il circuito riportato in Figura



con $R_3 = 2\Omega$, $L_1 = 0.5H$, $L_2 = 0.4H$.

1. Si descriva il circuito in termini di relazioni ingresso-stato e stato-uscita
2. Si verifichi la raggiungibilità del sistema

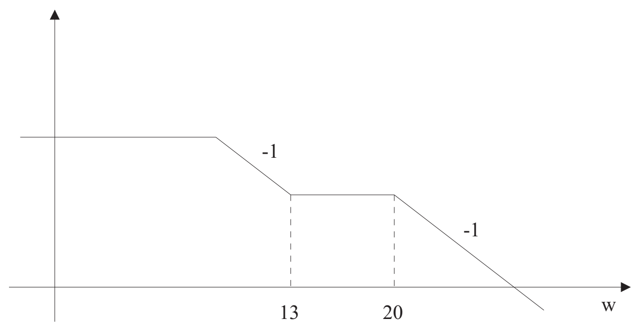


Figure 2: Diagramma cartesiano (esercizio 14)

3. Del circuito è stato rilevato il seguente diagramma cartesiano della risposta in frequenza (riportato in Figura 2)

   Si determinino i valori di R_1, di R_2, il guadagno statico, la posizione del polo a frequenza piu bassa e si calcolino la funzione di trasferimento

4. Si calcoli l'uscita **a regime** per

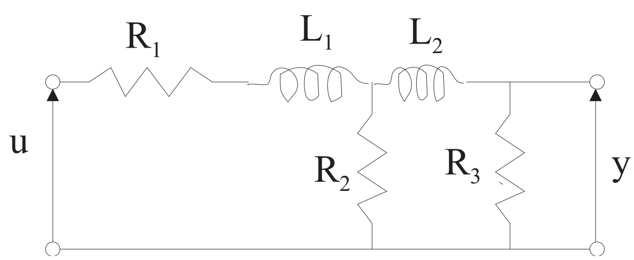
   $$u(t) = 3sca(t)$$

   e stato iniziale $x(0) = [2, 4]^T$.

5. Eseguendo una retroazione sullo stato si faccia in modo che il sistema si comporti come un oscillatore lineare con pulsazioni $\omega = 1rad/sec$.

15 Esercizio

Si consideri il sistema (S) rappresentato dal circuito elettrico riportato in Figura



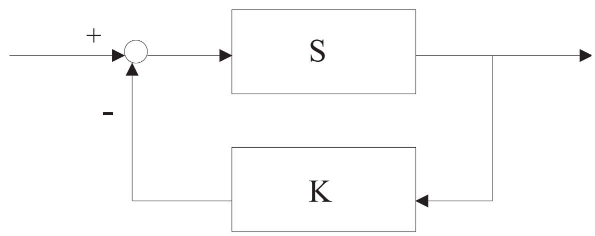
con $R_1 = 3$, $R_2 = 2$, $R_3 = 5.2$, $L_1 = 0.5H$, $L_2 = 0.4H$

a) Si descriva il sistema in termini di equazioni di stato.

b) Si verifichi la raggiungibilità dello stato.

c) Si calcoli la risposta impulsiva dell'uscita a meno dei coefficienti.

d) Si supponga di retroazionare il sistema (S) come in figura



dove K è un numero reale:

d.1) Se ne studi la stabilità al variare di K da $-\infty$ a $+\infty$.

d.2) Per quali valori di K il sistema in anello chiuso non presenta oscillazioni?

d.3) Qual è il valore di K per cui lo smorzamento del sistema retroazionato è $\xi = 0.5$ e qual'è la pulsazione naturale ω_n per tale valore di K?

d.4) Per quale valore di K la risposta impulsiva del sistema in anello chiuso presenta oscillazioni con periodo $T = 6.28$ sec? Qual è il valore di ξ corrispondente?

16 Esercizio

I due serbatoi riportati in Figura 3 sono cilindrici con area di base S_1 e S_2. Essi sono alimentati da un'unica pompa la cui portata volumetrica u si suddivide in parti uguali tra loro. La variabile di uscita y è il volume totale di fluido presente nei serbatoi al di sopra della quota assunta come zero nella misurazione dei livelli x_1 e x_2.

1. Si scriva il modello del sistemi in termini di equazioni ingresso-stato stato-uscita.

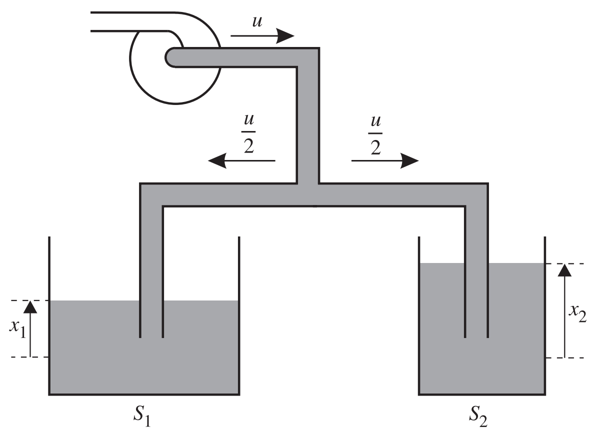


Figure 3: Schema dei serbatoi (esercizio 16)

2. Si enuncino le condizioni necessarie e sufficienti perchè un sistema lineare sia completamente raggiungibile e completamente osservabile.

3. Si studi la raggiungibilità e la osservabilità del sistema considerato.

4. Si calcoli la funzione di trasferimento del modello del sistema (si commenti il grado del denominatore ottenuto)

17 Esercizio

Di un sistema regolare, lineare ed invariante, privo di ritardi è stato rilevato il diagramma cartesiano dei moduli della risposta in frequenza riportato in Figura 4

1. Si determini la funzione di trasferimento del sistema sapendo che, per un ingresso a scalino, l'uscita a regime è di segno opposto all'ingresso e che il diagramma degli sfasamenti è monotono decrescente.

2. Si determini la risposta $y(t)$ per un ingresso $u(t) = sca(t)$

3. Si rappresenti il sistema in termini di relazioni ingresso-stato e stato-uscita

4. Eseguendo una retroazione sullo stato si faccia in modo che gli autovalori del sistema diventino $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = -5$.

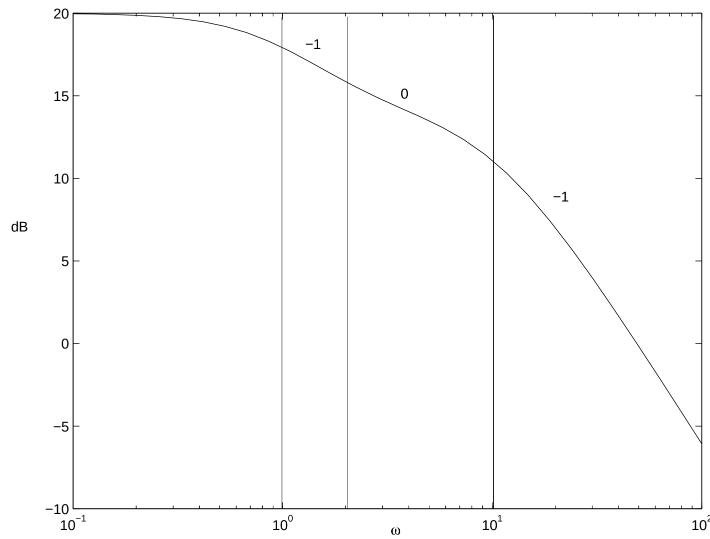


Figure 4: Diagramma dei moduli (esercizio 17)

18 Esercizio

Data

$$G(s) = \frac{s+18}{(s+3)^2}$$

1. Si calcoli l'uscita **a regime** per un ingresso

$$u(t) = sca(t) - 2ram(t-1) + 2ram(t-2) + sca(t-3)$$

2. Si calcoli l'uscita **a regime** per un ingresso $u(t) = 3sen(5t)$.

19 Esercizio

Di un sistema S si conosce il diagramma della risposta in frequenza riportato in Figura 5

1. Si ricavi la funzione di trasferimento del sistema e (usando i diagrammi cartesiani) si calcoli la risposta a regime per

$$u(t) = 2sen(5t)$$

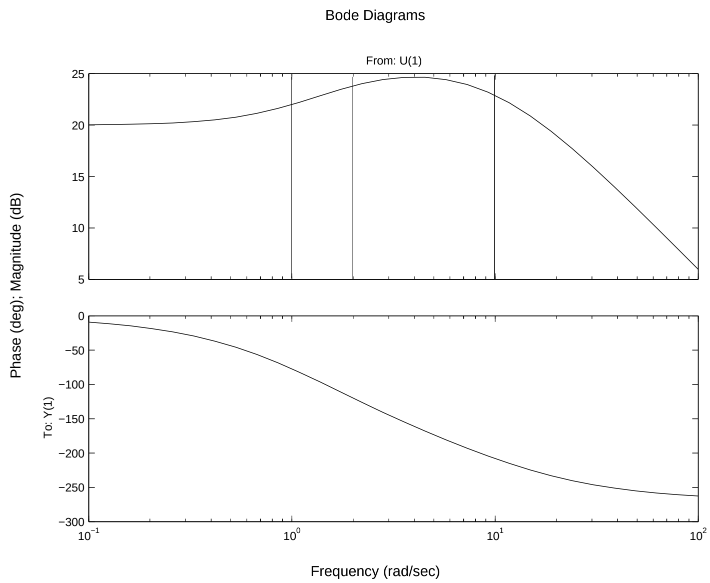


Figure 5: Diagramma della risposta in frequenza (esercizio 19)

2. Supponendo di retroazionare, con **retroazione positiva**, il sistema S con un dispositivo avente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{0.1(s+10)}{s+a}, \qquad a > 0$$

si studi la stabilità del sistema retroazionato, al variare di a usando il criterio di Routh.

20 Esercizio

Si traccino il diagramma polare qualitativo della risposta in frequenza del sistemi aventi funzione di trasferimento

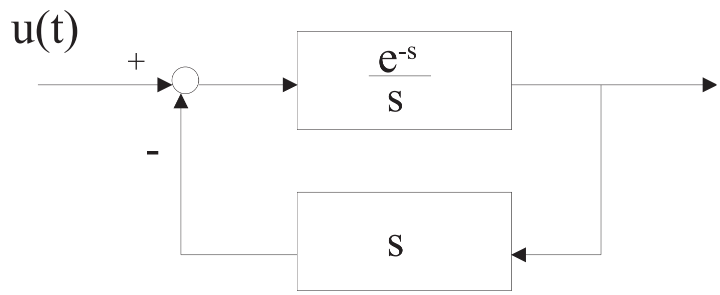
$$G(s) = \frac{(s^2+9)(s-1)}{s(s^2+1)(s+1)}$$

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{s^2(s^2+9)(s+1)}$$

$$G(s) = \frac{(2-s)}{s^2(s+1)}$$

21 Esercizio

Si consideri il sistema in Figura



e si determini l'uscita $y(t)$ per $u(t) = imp(t)$.

22 Esercizio

Dato un integratore, un derivatore ed una linea di ritardo con ritardo regolabile, si disegni uno schema a blocchi che, per un ingresso impulsivo, fornisca in uscita un'onda quadra con periodo di 3 secondi.

23 Esercizio

Si consideri il sistema

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -3x_1 + x_2 + 2u_1 + u_2 \\ \dot{x}_2 & = & 2x_1 - 4x_2 + 2u_2 \\ y & = & x_1 + x_2 \end{array}$$

1. Si calcoli la matrice di trasferimento
2. Si determini l'uscita a regime per $u(t) = \begin{bmatrix} 10sen(10t) \\ 2sca(t) \end{bmatrix}$

24 Esercizio

Sia data la seguente relazione ingresso-uscita di un sistema S

$$\frac{d^4y}{dt^4} + 3\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} = \frac{d^3u}{dt^3} + 2\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + 2u$$

1. Si determini la funzione di trasferimento di S

2. Si tracci il diagramma polare qualitativo della risposta in frequenza del sistema

25 Esercizio

Si dimostri con un esempio circuitale che due sistemi, singolarmenmte completamente raggiungibili, se messi in parallelo, possono dar luogo ad un sistema risultante non completamente raggiungibile.

26 Esercizio

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -4x_1 - 12x_2 + 2u_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 8x_2 + u_1 + u_2 \\ y &= 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

1. Si verifichi la osservabilità dello stato del sistema

2. Si calcoli l'uscita **a regime** per

$$u(t) = \begin{bmatrix} 10sca(t) \\ 50sen(t) \end{bmatrix}$$

27 Esercizio

Dato il sistema descritto dalla relazione ingresso-uscita

$$\frac{dy(t)^3}{dt^3} + 4\frac{dy(t)}{dt} = -3\frac{du(t)}{dt} + 6u(t)$$

1. Si studi la stabilità del sistema

2. Si traccino il diagramma polare e il diagramma di Bode della risposta in frequenza

28 Esercizio

Si consideri il sistema lineare descritto da

$$G(s) = \frac{3}{s+2}$$

Supponendo che in ingresso ci sia un treno di impulsi unitari con frequenza 0.5, si determini il valore massimo dell'uscita.

29 Esercizio

Su un albero rotante è sistemato un dispositivo di sicurezza che produce un segnale d'allarme quando la velocità angolare supera un valore preassegnato. Il dispositivo, mostrato in Figura 6, è costituito da una sorgente luminosa montata sull'albero e da due fotocellule fisse e distanziate di un angolo di 10°.

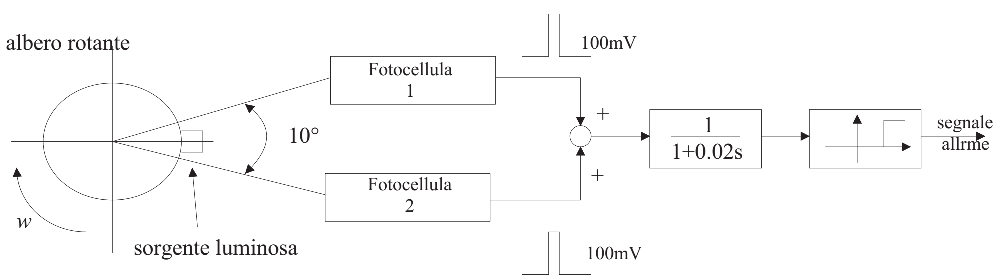


Figure 6: Rappresentazione del sistema di rilevamento allarmi (esercizio 29)

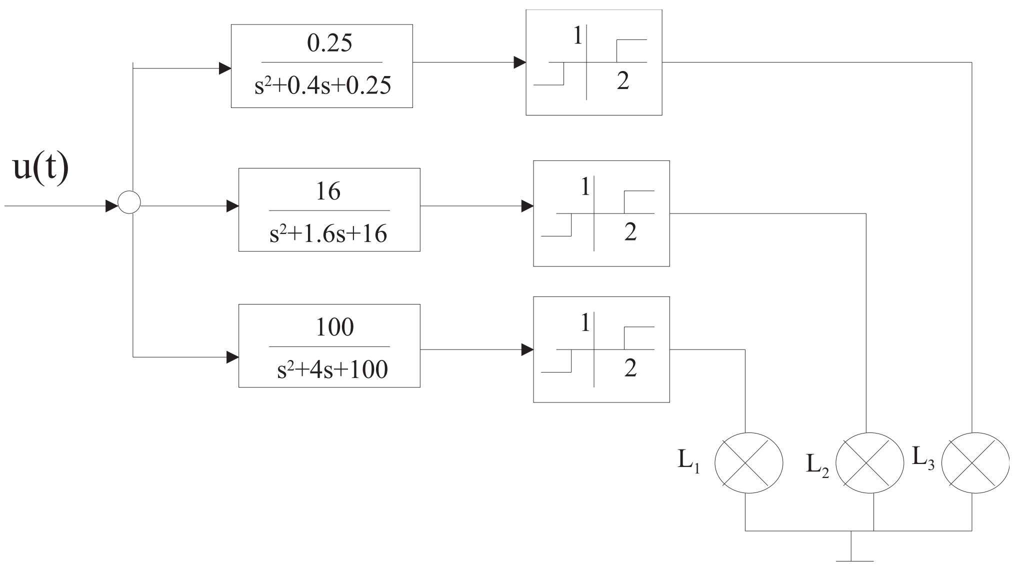
Si supponga, per semplicità, che gli impulsi generati dalle fotocellule siano ideali e che la loro Area ($100mV$) non dipenda dalla velocità di rotazione w.

Si determini come tarare la tensione di soglia V_s del relai in modo che si abbia un allarme quando $w \geq 1$ giro/sec .

30 Esercizio

Si consideri il sistema riportato in Figura

Supposto $u(t) = sen4t$, quali lampadine si accendono e per quale percentuale di tempo rimangono accese?



31 Esercizio

Si tracci il diagramma polare della risposta in frequenza del sistema S, avente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s(1+s)}$$

Si inserisca il sistema S nel schema riportato in Figura 7 e si determinino K e T, sapendo che per $u(t) = sen 1.7t$, $y(t) = 0$ a regime.

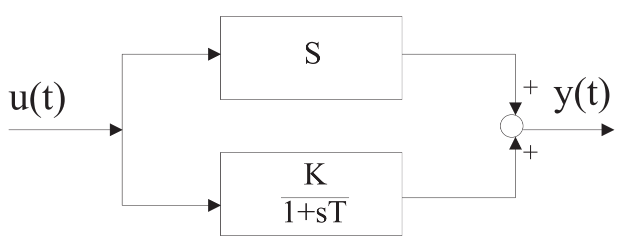
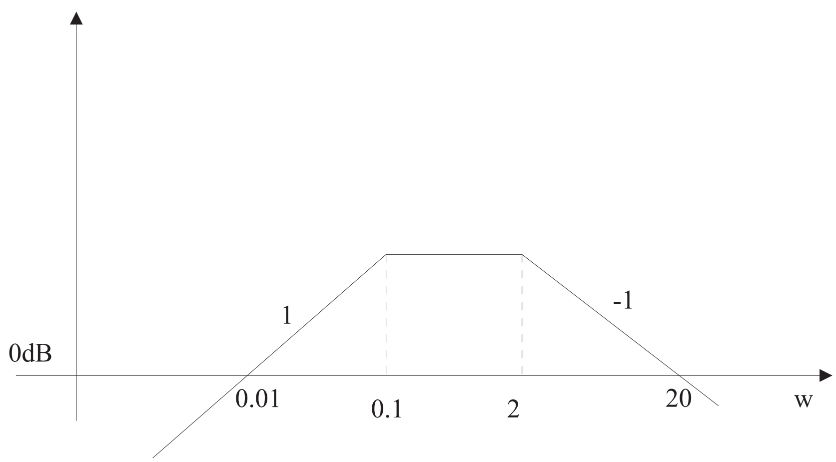


Figure 7: Schema del sistema (esercizio 31)

32 Esercizio

Di un sistema lineare, invariante, stabile, con guadagno positivo, senza ritardi, senza zeri con parte reale positiva, è stato rilevato il diagramma cartesiano dei moduli della risposta in frequenza riportato in Figura



1. Si determini la risposta per $t > 0$ ad un ingresso $u(t) = ramp(t) - ramp(t-1) - sca(t-2)$;

2. Si rappresenti il sistema in termini di equazioni ingresso-stato e stato-uscita.

3. Si esegua una retroazione sullo stato (i.e. $u = Kx + v$) in modo che gli autovalori del sistema siano $\lambda_1 = -0.2$ e $\lambda_1 = -1$

33 Esercizio

Si diano le condizioni affinchè la condizione iniziale di un sistema lineare tempo invariante possa essere considerata nulla in quanto non influenza il movimento dell'uscita. Si utilizzi un esempio per illustrare le condizioni introdotte.

34 Esercizio

Si determini, motivando brevemente, la corrispondenza fra le risposte allo scalino unitario riportate in Figura 8

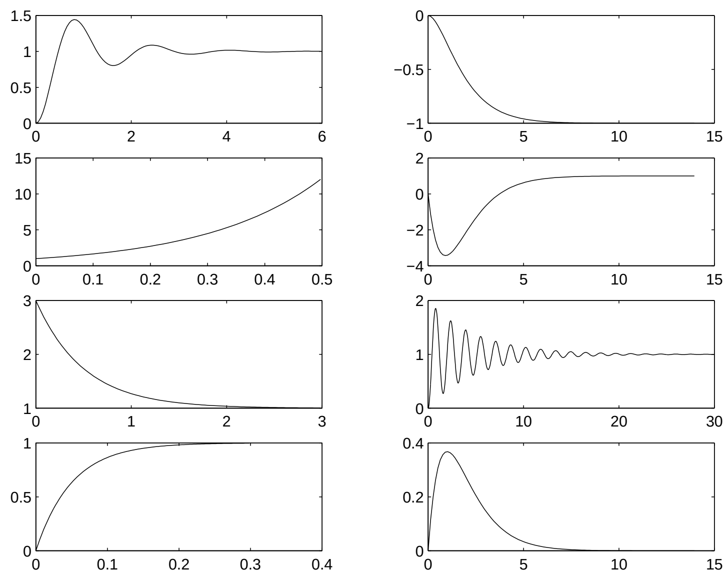


Figure 8: Risposte allo scallino (esercizio 34)

e i diagrammi cartesiani riportati in Figura 9

35 Esercizio

Si costruisca il diagramma polare qualitativo del sistema avente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{s^2(s^2+16)}$$

36 Esercizio

Si consideri il sistema riportato in Figura 10 con $L = 0.5\ m$, $m = 0.1 Kg$, attrito nullo

1. Si descriva il sistema in termini di equazioni di stato

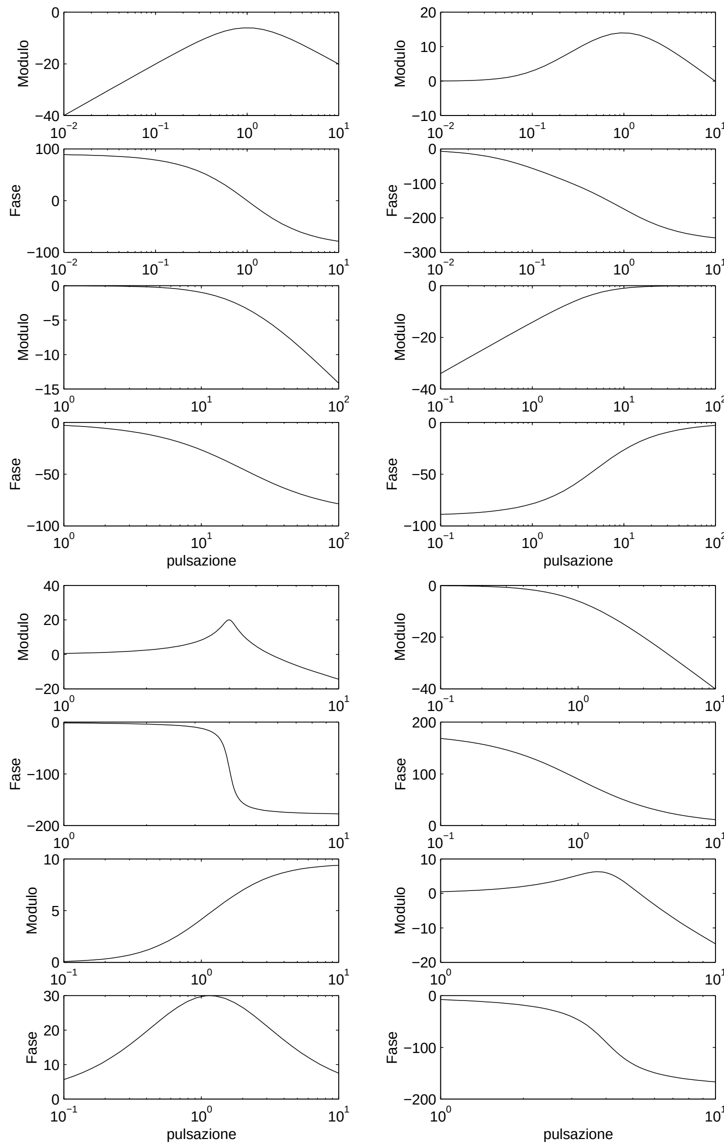


Figure 9: Diagrammi cartesiani (esercizio 34)

2. Si determinino F e K in modo tale che con il filo collegato il sistema sia in equilibrio in posizione L mentre tagliando il filo con le forbici il carrello passi per lo zero ogni 5 sec. (posizione di equilibrio del sistema autonomo)

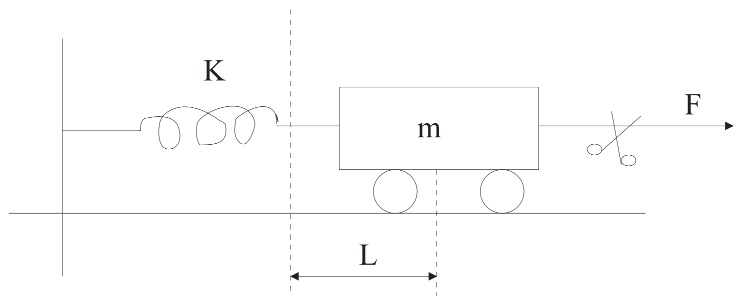


Figure 10: Sistema massa-molla (esercizio 36)

37 Esercizio

Si consideri il sistema definito dalla seguente terna di matrici

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Si verifichi l'osservabilità dello stato
2. Si calcoli l'uscita a regime per

$$u(t) = \begin{bmatrix} 10sca(t) \\ 50sen(t) \end{bmatrix}$$

38 Esercizio

Un sistema lineare invariante presenta con ingresso nullo un'uscita sinusoidale. Di che ordine può essere il sistema? Che caratteristica avranno i sui autovalori?

39 Esercizio

Un sistema lineare invariante ha una funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)}$$

Si dica se è instabile, stabile o asintoticamente stabile e si giustifichi la risposta.

40 Esercizio

1. Si rappresenti graficamente in modo qualitativo il diagramma polare della risposta in frequenza del sistema avente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

2. Si ricavi per quali frequenze l'uscita è sfasata rispetto all'ingresso di multipli di 2π rad.

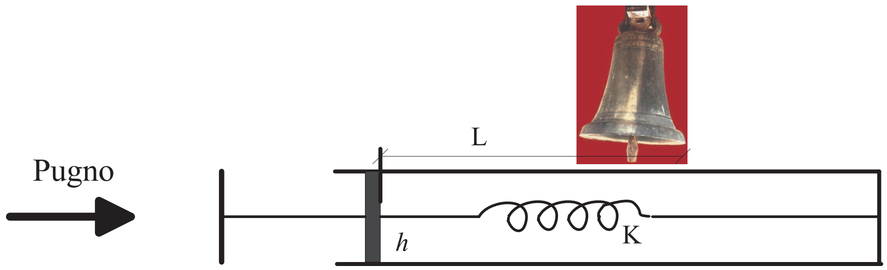
41 Esercizio

Si disegnino i diagrammi cartesiani approssimati delle seguenti funzioni di trasferimento

$$\begin{aligned}
L_1(s) &= -\frac{1}{s} \\
L_2(s) &= \frac{1}{s(1+10s)} \\
L_3(s) &= \frac{10(1-s)}{s(1+0.1s)} \\
L_4(s) &= \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)} \\
L_5(s) &= \frac{1}{s} \\
L_6(s) &= \frac{10}{s(1+100s)^2} \\
L_7(s) &= \frac{10}{(1+s+s^2)} \\
L_8(s) &= \frac{1}{(1-s)}
\end{aligned}$$

42 Esercizio

In una fiera di paese i visitatori possono valutare la forza dei loro pugni utilizzando la macchina schematizzata nella figura seguente



dove $L = 20$ cm è la distanza da far compiere al pistone per far suonare la campana, $K = 20N/m$ è il coefficiente elastico della molla, $h = 400Ns/m$ è il coefficiente di attrito lineare del pistone mentre la massa del pistone è trascurabile.

Il visitatore deve scagliare un pugno ogni 10 sec sino a far suonare la campana. A seconda del numero di colpi necessari per far suonare la campana la macchina dà i seguenti risultati:

Categoria	A	B	C	Ritirati!!
Numero colpi	1	2	3	>3

1. Qual'è la forza F in N con cui occorre colpire per appartenere alle diverse categorie?

2. Qual'è la forza al di sotto della quale la campana non suonerebbe nemmeno con un numero infinito di colpi?

43 Esercizio

Si consideri il sistema dinamico descritto da

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)(1 - x(t)u(t)) - \frac{x^2(t)}{1 + x(t)} \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

1. Determinare il valore di $\bar{u}$ perchè si abbia un equilibrio con $\bar{x} = 1$.

2. Linearizzare il sistema attorno a tale punto di equilibrio, trovando le equazioni del sistema linearizzato in variabili di stato.

3. Studiare la stabilità di tale punto di equilibrio.
4. Calcolare il movimento libero e la risposta impulsiva dell'uscita del sistema linearizzato.
5. Ricavare la funzione di trasferimento del sistema linearizzato.
6. Utilizzando un'approssimazione lineare del sistema non lineare, determinare l'uscita **a regime** per

$$u(t) = 1.1\ \bar{u} + sen(4t)$$

44 Esercizio

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e spiegare brevemente il perchè.

	V	F
1) Le proprietà di stabilità di un sistema LTI dipendono solo dalle caratteristiche della matrice della dinamica A	☐	☐
2) La sovraelongazione massima percentuale della risposta allo scalino di un sistema del secondo ordine dipende solo dalla pulsazione naturale ω_N.	☐	☐
3) Un sistema asintoticamente stabile in anello aperto è sempre stabile anche in anello chiuso	☐	☐
4) La risposta allo scalino di un sistema con lo stesso numero di poli e zeri è sempre uguale a zero per $t = 0$	☐	☐
5) Dato il sistema LTI (A,B,C,D) l'osservabilità dipende solo dalle matrici (A,C)	☐	☐
6) Un punto di equilibrio di un sistema non lineare è asintoticamente stabile se e solo se la matrice della dinamica A del sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio ha tutti gli autovalori con parte reale negativa.	☐	☐

45 Esercizio

Si studi la stabilità dei punti di equilibrio dei seguenti sistemi dinamici:

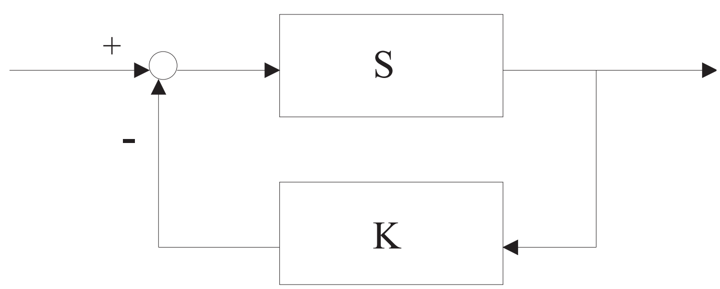
$$\begin{array}{lrcl} 1) & \dot{x}(t) & = & x^3(t) \\ 2) & \dot{x}(t) & = & -x^3(t) \end{array}$$

46 Esercizio

Il sistema S ha la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{3(1+10s)}{s^2(2s^2+3s+1)}$$

1. Si studi la stabilità del sistema S
2. Supposto di retroazionare il sistema S come rappresentato in Figura



   applicando il criterio di Routh-Hurwitz si calcoli per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Risultati

Esercizio 1

1. $\bar{x}_1 = 5, \bar{x}_2 = 1.$

2. $$A = \begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 80 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Equilibrio asintoticamente stabile

4. $$G(s) = \frac{-400}{(s+12)(s+10)}$$

Esercizio 2

1. Variabili di stato $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = i$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{1}{M}\frac{x_3^2}{x_1} \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L}x_3 + \frac{u}{L} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_3 &= \pm 7A \\ u &= \pm 28V \end{aligned}$$

3. Entrambi gli equilibri sono instabili.

Esercizio 3

a) (1) $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0$
   (2) $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 0$
   (3) $\bar{x}_1 = -1, \bar{x}_2 = 0$

b) (1) il punto di equilibrio $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0$ è asintoticamente stabile
(2) il punto di equilibrio $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 0$ è instabile
(3) il punto di equilibrio $\bar{x}_1 = -1, \bar{x}_2 = 0$ è instabile

Esercizio 4

a) $\bar{x}_1 = 480, \bar{x}_2 = 100, \bar{u} = 480$, $\bar{y} = 480$

b) $\delta x = x - \bar{x}$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$
$\dot{\delta x} = A\delta x + B\delta u$
$\delta y = C\delta x + D\delta u$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3.2 \\ 0 & 3.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

c) il punto di equilibrio è instabile

d)

$$G(s) = \frac{-3.2}{s^2 - 2.2s - 3.2}$$

e) il sistema retroazionato è instabile per ogni valore di K

Esercizio 5

Scelta

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

risulta

$$P = \frac{1}{128} \begin{bmatrix} 36 & 2 \\ 2 & 29 \end{bmatrix}$$

che è definita positiva e quindi il sistema è asintoticamente stabile.
Gli autovalori di A sono a parte reale negativa e quindi il sistema è asintoticamente stabile.

Esercizio 6

$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \alpha x_2^2)$ con $0.0334 < \alpha < 29.966$ è definita positiva e $\dot{V(x)}$ è definita negativa e quindi per il teorema di Lyapunov il sistema è asintoticamente stabile.
La stabilità del sistema è confermata dagli autovalori di A che sono a parte

reale negativa.

Esercizio 7

$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \alpha x_2^2)$ con $\alpha = 1$ è definita positiva e $\dot{V(x)}$ è definita negativa e quindi per il teorema di Lyapunov il sistema è asintoticamente stabile. La stabilità del sistema è confermata dagli autovalori di A che sono a parte reale negativa.

Esercizio 8

$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \alpha x_2^2)$ con $0.5147 < \alpha < 17.4853$ è definita positiva e $\dot{V(x)}$ è definita positiva e quindi per il teorema di Lyapunov il sistema è instabile. La stabilità del sistema è confermata dagli autovalori di A che sono a parte reale positiva.

Esercizio 9

1. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -h \end{bmatrix}$$

   $$V(x) = \frac{1}{2}x' \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & 1 \end{bmatrix} x, \dot{V}(x) = x' \begin{bmatrix} -p_{12} & \frac{p_{11}-p_{12}h-1}{2} \\ \frac{p_{11}-p_{12}h-1}{2} & p_{12} - h \end{bmatrix} x$$

   con $p_{11} = \frac{h^2}{2} + 1$, $p_{12} = \frac{h}{2}$, $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) < 0$ e quindi il sistema è asintoticamente stabile $\forall h > 0$.

2. $h < 2$

Esercizio 10

Per la formula di Lagrange risulta $x(t) = e^{at}x(0)$ quindi

1. se $a < 0$, la definizione di stabilità è soddisfatta con $\delta = \epsilon/2$; inoltre poichè $lim_{t->\infty}x(t) = 0$ il sistema è asintoticamente stabile.

2. se $a = 0$, la definizione di stabilità è soddisfatta con $\delta = \epsilon/2$; inoltre poichè $lim_{t->\infty}x(t) \neq 0$ il sistema è stabile.

3. se $a > 0$, la definizione di stabilità non è soddisfatta e quindi il sistema è instabile.

Esercizio 11

1. Non trabocca mai
2. Il livello oscilla tra 2.62 e 2.37.

Esercizio 12

1. $$A = \begin{bmatrix} -15 & 5 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, D = 0$$
2. Completamente raggiungibile
3. $$K = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$
4. $$G(s) = \frac{5(s+6)}{(s+10)(s+3)}$$
5. $$y_\infty = 100$$

Esercizio 13

1. $$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
2. $\lambda_1 = -1.32$, $\lambda_2 = -13.68$
   $x_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$
   $x_2(t) = \alpha_3 e^{\lambda_1 t} + \alpha_4 e^{\lambda_2 t}$
3. $x_1(t) = 1.91 sen(2t - 0.81) + 0.667$
   $x_2(t) = 1.2 sen(2t + 0.47)$

Esercizio 14

1. $$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_3}{L_1} & \frac{R_3}{L_1} \\ \frac{R_3}{L_2} & -\frac{R_2+R_3}{L_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} R_3 & -R_3 \end{bmatrix}, D = 0$$

2. Completamente raggiungibile

3. $R_1 = 3, R_2 = 5.2$, guadagno=0.325, polo=-8
   $G(s) = \frac{4s+52}{s^2+28s+160}$

4. $y_\infty = 0.975$

5. $u(t) = \begin{bmatrix} 14 & -34.5 \end{bmatrix} x(t)$

Esercizio 15

a)

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_2}{L_1} & \frac{R_2}{L_1} \\ \frac{R_2}{L_2} & -\frac{R_2+R_3}{L_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & R_3 \end{bmatrix}, D = 0$$

b) Completamente raggiungibile

c) $g_y(t) = \alpha_1 e^{-8t} + \alpha_2 e^{-20t}$

d.1) Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per $K > -\frac{160}{52}$, stabile per $K = -\frac{160}{52}$, instabile per $K < -\frac{160}{52}$

d.2) Il sistema in anello chiuso non presenta oscillazioni per $K \leq 0.6923$

d.3) $K = 12$, $\omega_n = 28$

d.4) $K = 0.7115$, $\xi = 0.9975$

Esercizio 16

1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2S_1} \\ \frac{1}{2S_2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix}, D = 0$$

3. Non è nè completamente raggiungibile nè completamente osservabile

4. $G(s) = \frac{1}{s}$

Esercizio 17

1. $G(s) = \frac{-10(1-\frac{s}{2})}{(1+s)(1+\frac{s}{10})} = \frac{50(s-2)}{(s+1)(s+10)}$

2. $y(t) = -\frac{50}{3}e^{-t} - \frac{20}{3}e^{-10t} - 10$

3.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -100 & 50 \end{bmatrix}, D = 0$$

4. $u(t) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} x(t)$, $K_1 = -10$, $K_2 = 2$

Esercizio 18

1. $y(t) = 0$

2. $y(t) = 1.6484 sen(5t - 1.7898)$

Esercizio 28

Valore Massimo = 3.06

Esercizio 29

$$V_s = 6.247$$

Esercizio 30

La prima lampadina non si accende mai
La seconda lampadina si accende per il 41% del tempo
La terza lampadina non si accende mai

Esercizio 31

$$T = 0.59,\ K = -1.48$$

Esercizio 36

$$k = 0.0395,\ F = 0.19$$

Esercizio 42

Categoria A (tira un colpo): $F > 80N$
Categoria B (tira due colpi): $49.8N \leq F \leq 80N$
Categoria C (tira tre colpi): $40.52N \leq F \leq 49.8N$

Con una forza minore di $31.5N$ la campana non suonerrebbe mai nemmeno con un numero infinito di colpi uguali distanziati di 10 sec.

Esercizio 43

1. $\bar{u} = 0.5$

2.
$$\begin{aligned} \delta\dot{x}(t) &= -\frac{3}{4}\delta x(t) - \delta u(t) \\ \delta y(t) &= \delta x \end{aligned}$$

3. Autovalore $-\frac{3}{4}$ quindi l'equilibrio è asintoticamente stabile.

4.
$$x_l = e^{-\frac{3}{4}t}x(0)$$
$$g_y(t) = -e^{-\frac{3}{4}t}$$

5.
$$G(s) = -\frac{1}{s+3/4}$$

6.
$$y(t) = 0.9333 + 0.2457sen(4t - 4.53)$$

Esercizio 44

1. Vera. In particolare dipende dalla parte reale degli autovalori della matrice A
2. Falsa. S% dipende solo dallo smorzamento ξ
3. Falsa. Chiudendo l'anello gli autovalori del sistema cambiano.
4. Falsa. E' uguale alla costante di trasferimento.
5. Vera. La matrice di osservabilità dipende solo da A e C
6. Falsa. Perchè il punto di equilibrio di un sistema non lineare può essere asintoticamente stabile anche se il sistema linearizzato ha autovalori con parte reale nulla.